Ejercicios

3.66 Suponga que Y es una variable aleatoria con distribución geométrica. Demuestre que

a $\sum_y p(y) = \sum_{y=1}^{\infty} q^{y-1} p = 1.$

b $\dfrac{p(y)}{p(y-1)} = q$, para $y = 2, 3, \ldots$. Esta relación es menor que 1, lo cual implica que las probabilidades geométricas están decreciendo en forma monotónica como función de y. Si Y tiene una distribución geométrica, ¿qué valor de Y es el más probable (tiene la más alta probabilidad)?

3.67 Suponga que 30% de los solicitantes para cierto trabajo industrial posee capacitación avanzada en programación computacional. Los candidatos son elegidos aleatoriamente entre la población y entrevistados en forma sucesiva. Encuentre la probabilidad de que el primer solicitante con capacitación avanzada en programación se encuentre en la quinta entrevista.

3.68 Consulte el Ejercicio 3.67. ¿Cuál es el número esperado de solicitantes que será necesario entrevistar para hallar el primero con capacitación avanzada?

3.69 Unos seis meses después del segundo periodo de George W. Bush como presidente, una encuesta de Gallup indicó que un nivel (bajo) muy cerca del récord de 41% de adultos expresaron "mucha" o "bastante" confianza en la suprema corte de Estados Unidos (http://www.gallup.com./poll/content/default.aspx?ci=17011), junio de 2005). Supongamos que usted realizó su propia encuesta telefónica en ese tiempo y al azar llamó a personas y les pidió describieran su nivel de confianza en la suprema corte. Encuentre la distribución de probabilidad de Y, el número de llamadas hasta que se encuentre la primera persona que *no* exprese "mucha" o "bastante" confianza en la suprema corte de Estados Unidos.

3.70 Una empresa de exploración petrolera va a hacer una serie de perforaciones de sondeo en una zona determinada en busca de un pozo productivo. La probabilidad de que tenga éxito en un intento dado es .2.

a ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera perforación sea la primera en dar un pozo productivo?

b Si la empresa puede darse el lujo de perforar a lo sumo diez pozos, ¿cuál es la probabilidad de que no encuentre un pozo productivo?

3.71 Denote con Y una variable aleatoria geométrica con probabilidad de éxito p.

a Demuestre que para un entero positivo a,

$$P(Y > a) = q^a.$$

b Demuestre que para los enteros positivos a y b,

$$P(Y > a + b | Y > a) = q^b = P(Y > b).$$

Este resultado implica que, por ejemplo, $P(Y > 7|Y > 2) = P(Y > 5)$. ¿Por qué supone que esta propiedad recibe el nombre de propiedad *sin memoria* de la distribución geométrica?

c En el desarrollo de la distribución de la variable aleatoria geométrica supusimos que el experimento consistió en realizar intentos idénticos e independientes hasta que se observó el primer éxito. En vista de estas suposiciones, ¿por qué es "obvio" el resultado en el inciso b?

3.72 Dado que ya hemos lanzado al aire una moneda balanceada diez veces y no obtuvimos caras, ¿cuál es la probabilidad de que debemos lanzarla al menos dos veces más para obtener la primera cara?

3.73 Un contador público certificado (CPA, por sus siglas en inglés) ha encontrado que nueve de entre diez compañías auditadas contienen errores importantes. Si el CPA hace auditoría a una serie de cuentas de empresas, ¿cuál es la probabilidad de que la primera cuenta que contenga errores importantes

a sea la tercera en ser auditada?,

b sea la tercera cuenta auditada la que le sigue?

3.74 Consulte el Ejercicio 3.73. ¿Cuáles son la media y la desviación estándar del número de cuentas que deben ser examinadas para hallar la primera con errores importantes?

3.75 La probabilidad de que llegue un cliente al mostrador de servicio de una tienda en un segundo cualquiera es igual a .1. Suponga que llegan clientes en forma aleatoria y por tanto que una llegada en un segundo cualquiera es independiente de las otras. Encuentre la probabilidad de que la primera llegada

a ocurra durante el tercer intervalo de un segundo.

b no ocurra hasta al menos el tercer intervalo de un segundo.

3.76 Si Y tiene una distribución geométrica con probabilidad de éxito .3, ¿cuál es el máximo valor, y_0, tal que $P(Y > y_0) \geq .1$?

3.77 Si Y tiene una distribución geométrica con probabilidad p de éxito, demuestre que

$$P(Y = \text{un entero impar}) = \frac{p}{1 - q^2}.$$

3.78 De una población de consumidores, 60% tienen fama de preferir una marca particular, A, de pasta dental. Si se entrevista a un grupo de consumidores escogidos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente cinco personas tengan que ser entrevistadas para hallar el primer consumidor que prefiera la marca A? ¿Al menos cinco personas?

3.79 Al contestar una pregunta de encuesta en un tema delicado (por ejemplo: "¿Ha fumado mariguana alguna vez?"), muchas personas prefieren no contestar de manera afirmativa. Suponga que 80% de la población no ha fumado mariguana y que todos contestan negativamente con verdad a la pregunta. El 20% restante de la población han fumado mariguana y 70% de ellos mentirán. Deduzca la distribución de probabilidad de Y, el número de personas a las que sería necesario preguntar para obtener una sola respuesta afirmativa.

3.80 Dos personas, por turnos, tiran un dado imparcial hasta que una de ellas lanza un 6. La persona A tiró primero, la B en segundo, A en tercero y así sucesivamente. En vista de que la persona B tiró el primer 6, ¿cuál es la probabilidad de que B obtenga el primer 6 en su segundo tiro (es decir, en el cuarto tiro total)?

3.81 ¿Cuántas veces esperaría usted lanzar al aire una moneda balanceada para obtener la primera cara?

3.82 Consulte el Ejercicio 3.70. La empresa hace perforaciones de exploración hasta que encuentra un pozo productivo. ¿Cuántas perforaciones esperaría hacer la empresa? Interprete intuitivamente su respuesta.

3.83 Al secretario de los Ejercicios 2.121 y 3.16 se le dieron n contraseñas de computadora y la prueba al azar. Exactamente una de las contraseñas permite el acceso a un archivo de computadora. Suponga ahora que el secretario selecciona una contraseña, la intenta y si no funciona, la regresa con las otras antes de seleccionar al azar la siguiente (¡no es muy buen secretario!) ¿Cuál es la probabilidad de hallar la contraseña correcta en el sexto intento?

3.84 Consulte el Ejercicio 3.83. Encuentre la media y la varianza de Y, el número de intento en el que se identifica la contraseña correcta.

***3.85** Encuentre $E[Y(Y - 1)]$ para una variable aleatoria geométrica Y al hallar $d^2/dq^2\left(\sum_{y=1}^{\infty} q^y\right)$. Use este resultado para hallar la varianza de Y.

***3.86** Considere una extensión de la situación examinada en el Ejemplo 3.13. Si observamos y_0 como el valor para una variable aleatoria geométrica Y, demuestre que $P(Y = y_0)$ se maximiza cuando $p = 1/y_0$. De nuevo, estamos determinando (en general esta vez) el valor de p que maximiza la probabilidad del valor de Y que en realidad observamos.